ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1. Вычислить предел
$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\sin 2x}{x+2i}\,dx.$$

2. Функция $u\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ является решением задачи Коши
$$x\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-y\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0,\quad x\in\mathbb{R},\quad u\in\mathbb{R},$$
$$u(1,y)=y^2,\quad y\in\mathbb{R}.$$
Найти функцию $u(x,y)$ и вычислить криволинейный интеграл
$$\oint\limits_{\gamma}u(x,y)\,dy,$$
где кривая γ — это граница области $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;\begin{smallmatrix}x^2+y^2<1,\\ x<0,\ y<0\end{smallmatrix}\right\}$, ориентированная против часовой стрелки.

3. Найти минимум функционала
$$J(u)=\int\limits_0^1\frac{\exp(2u'(x))}{2-x}\,dx,\quad u\in C^2[0,1],$$
на множестве $M=\left\{\,u\in C^2[0,1]\;\middle|\;u(0)=0,\ \ u(1)=0\,\right\}$, и указать экстремаль, доставляющую минимум.

4. Повар независимо готовит три блюда, каждое с вероятностью $\frac{2}{3}$ может быть испорчено — может подгореть или быть пересоленным. Подгоревшее и пересоленное блюдо является несъедобным, в противном случае его можно есть. Найти вероятность того, что хотя бы два блюда можно есть, если известно, что каждое блюдо было испорчено.

5. Решить задачу Коши
$$(x^2+1)u''(x)+2xu'(x)-2u(x)=0,\quad x>0,$$
$$u(0)=1,\quad u'(0)=0.$$

6. Решить уравнение

$$u(x) = \int\limits_0^x \frac{u(t)}{2}\,dt - \int\limits_x^1 \frac{u(t)}{2}\,dt - \exp(x), \quad 0 \le x \le 1.$$

7. Решить задачу Коши для уравнения Шрёдингера

$$i\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$u(0,x) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} = \Delta u(t,x,y), \quad t > 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(0,x,y) = \exp(-(x+y)^2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

9. Решить задачу Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t,x,y,z)}{\partial t^2} = \Delta u(t,x,y,z), \quad t > 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$u(0,x,y,z) = \operatorname{arctg}(x + 2y - z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$\frac{\partial u(0,x,y,z)}{\partial t} = 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

10. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad x^2 + y^2 < 1,$$

$$u(x,y)\Big|_{x^2+y^2=1} = x^2 y^2.$$

ОТВЕТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

ЗАДАЧА	ОТВЕТ
1.	$\lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\sin 2x}{x+2i}\,dx=\frac{\pi}{e^4}$, $\int\limits_{-R}^{R}\frac{\exp(2ix)}{x+2i}\,dx\to 0,\quad \int\limits_{-R}^{R}\frac{\exp(-2ix)}{x+2i}\,dx\to -2\pi i\operatorname*{res}\limits_{z=-2i}\frac{\exp(-2iz)}{z+2i}=-\frac{2\pi i}{e^4}.$
2.	$u(x,y)=x^2y^2,\qquad \oint\limits_{\gamma}u(x,y)\,dy=-\dfrac{2}{15}$
3.	$u_*(x)=(1-x)\ln 2+(x-2)\ln\sqrt{2-x},\qquad J(u_*)=\dfrac{e}{4}$
4.	$\frac{7}{27}=1-P(A_0\|B)-P(A_1\|B)=1-\frac{P(A_0B)+P(A_1B)}{P(B)}=1-\frac{40}{54}$, A_k — k блюд можно есть, B — все блюда испорчены, $P(A_0B)=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4\cdot16}{3^6},\quad P(A_1B)=3\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4\cdot24}{3^6}$, $P(B)=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)^3+3\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)^3=\frac{4\cdot54}{3^6}$
5.	$u(x)=1+x\,\mathrm{arctg}(x),\quad x\geq 0$

ЗАДАЧА	ОТВЕТ
6.	$u(x) = \left(-\frac{1}{1+e} - x\right)\exp(x)$, $u'(x) = u(x) - \exp(x), \quad u(0) + u(1) = -1 - e$
7.	$u(t,x) = \exp(it)\cos(x)$
8.	$u(t,x,y) = \frac{\exp\left(-\frac{(x+y)^2}{8t+1}\right)}{\sqrt{8t+1}}$, $u(t,x,y) = f(t,x+y), \quad f_t(t,\xi) = 2f_{\xi\xi}(t,\xi), \quad f(0,\xi) = \exp(-\xi^2)$, $f(t,\xi) = \frac{A}{\sqrt{8\pi(t+\alpha)}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{8(t+\alpha)}\right), \quad \xrightarrow{A=\sqrt{\pi},\ \alpha=\frac{1}{8}} \quad f(t,\xi) = \frac{\exp\left(-\frac{\xi^2}{8t+1}\right)}{\sqrt{8t+1}}$
9.	$u(t,x,y,z) = \frac{\mathrm{arctg}\left(x+2y-z-\sqrt{6}t\right)+\mathrm{arctg}\left(x+2y-z+\sqrt{6}t\right)}{2}$
10.	$u(t,x,y) = \dfrac{1 - r^4\cos(4\varphi)}{8} = \dfrac{1 + 6x^2y^2 - x^4 - y^4}{8}$, где $\quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$

Стоимость каждой задачи — два очка.